دانشگاه رازی

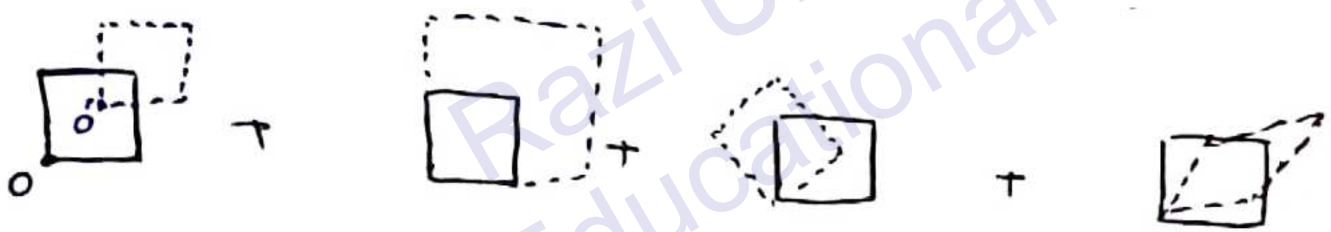
مکانیک سیالات۲

حرکت و تغییر شکل المان سیال و تنش‌های برشی و عمودی

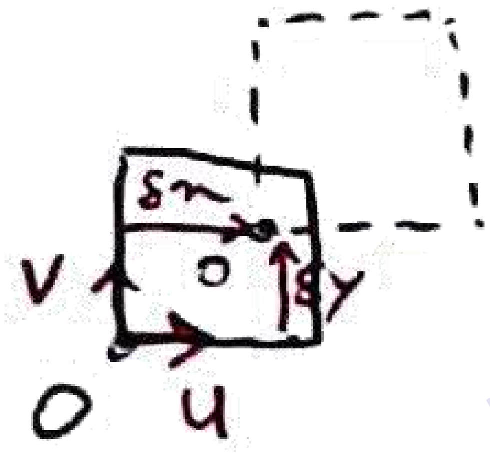
میثم سعیدی-استادیار گروه مهندسی مکانیک

دسته بندی حرکت و تغییر شکل خطی و زاویه ای

- ✓ حرکت انتقالی
- ✓ تغییر شکل خطی
- ✓ چرخش صلب گونه
- ✓ تغییر شکل زاویه ای



حرکت انتقالی

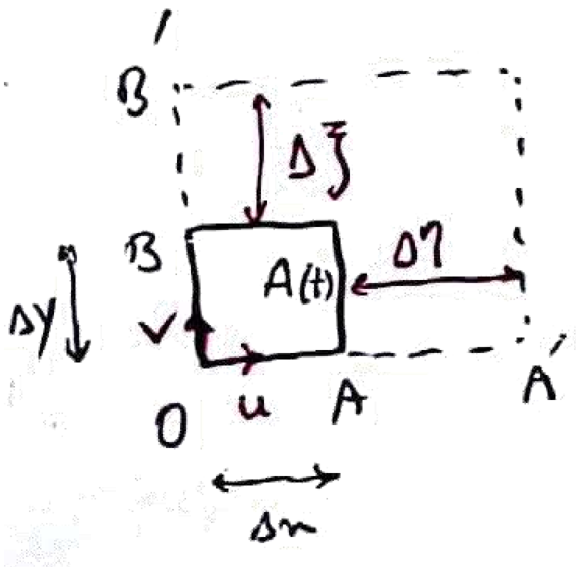


$$\delta x = u\,\delta t$$

$$\delta y = v\,\delta t$$

$$\delta z = w\,\delta t$$

تغییر شکل خطی



- ✓ المان سیال ضمن حرکت از یک نقطه به نقطه دیگر می تواند تغییر شکل خطی بدهد که باعث تغییر حجم المان سیال می‌شود.

$$A(t) = \Delta x \, \Delta y$$

$$A(t+\delta t) = (\Delta x + \Delta \eta)(\Delta y + \Delta \xi)$$

$$\rightarrow \Delta A = A(t+\delta t) - A(t) = \Delta x \Delta \xi + \Delta \eta \Delta y + \Delta \eta \Delta \xi$$

$$\Delta \eta = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \, \delta t \, , \, \Delta \xi = \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \, \delta t \quad \Rightarrow \Delta A = \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \Delta x \, \delta t + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \Delta y \, \delta t + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \Delta x \Delta y \, \delta t^2}_{\simeq 0}$$

$$\rightarrow \Delta A = A \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{A} \frac{\Delta A}{\delta t} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

تغییر شکل خطی (ادامه)

- در حالت سه بعدی تغییر شکل خطی منجر به تغییر حجم المان سیال می شود.

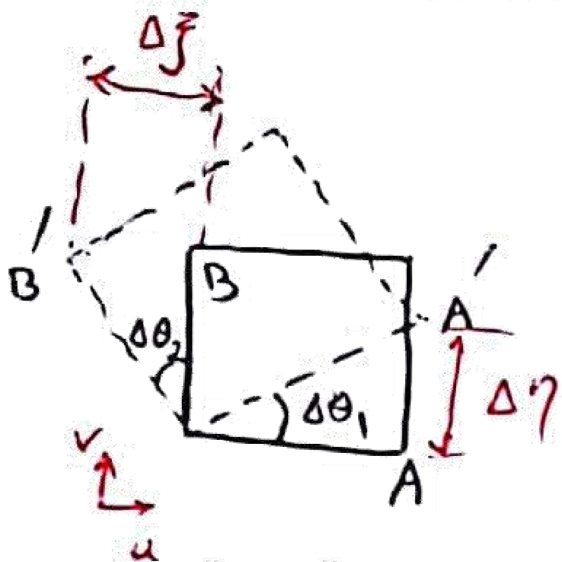
$$\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\dot{\varepsilon}_{xx}+\dot{\varepsilon}_{yy}+\dot{\varepsilon}_{zz}$$

- شرط اینکه جریان تراکم ناپذیر باشد اینست که دیورژانس سرعت صفر باشد.

$$\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta t}=\nabla\cdot\vec{V}$$

چرخش

✓ المان سیال ضمن حرکت از یک نقطه به نقطه دیگر می‌تواند چرخش داشته باشد.



$$\omega_z = \frac{1}{2}(\omega_{OA} + \omega_{OB})$$

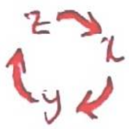
$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\delta t}, \quad \omega_{OB} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t}$$

$$\Delta\eta = \Delta x \, \Delta\theta_1 = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \, \delta t \longrightarrow \frac{\Delta\theta_1}{\delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Delta\xi = \Delta y \, \Delta\theta_2 = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \, \delta t \longrightarrow \frac{\Delta\theta_2}{\delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\to \omega_z = \frac{1}{2}\left[\lim \frac{\partial v}{\partial x} - \lim_{\delta t \to 0} \frac{\partial u}{\partial y}\right] \longrightarrow \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

چرخش (ادامه)



بطور مشابه: $\rightarrow \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\rightarrow \vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}$$

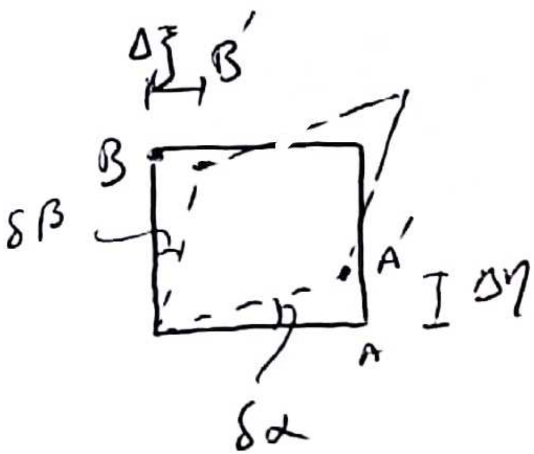
- دو برابر میدان چرخش را ورتیسیته (vorticity) گویند.

$$\xi = 2\vec{\omega}$$

$$\xi = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

- درصورتیکه چرخش میدان ورتیسیته برابر صفر باشد میدان غیرچرخشی (irrotational) درغیر اینصورت چرخشی (rotational) می‌باشد.

تغییر شکل زاویه‌ای



- ✓ المان سیال ضمن حرکت از یک نقطه به نقطه دیگر می‌تواند تغییر شکل زاویه ای داشته باشد.

$$\Delta\eta = \Delta x \cdot \delta\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\,\delta t \Rightarrow \frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Delta\xi = \Delta y \cdot \delta\beta = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\,\delta t \Rightarrow \frac{\delta\beta}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \dot{\gamma}_{yx}$$

$$\dot{\gamma}_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \dot{\gamma}_{zx}$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \dot{\gamma}_{zy}$$

تانسور نرخ تغییر شکل

$$\vec{\dot{\gamma}} = \begin{vmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{zx} \\ \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\gamma}_{zy} \\ \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{yz} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{vmatrix}$$

مثال

- ✓ جریان دو بعدی زیر را از نظر تراکم‌پذیری و چرخش بررسی نمایید.

$$\boxed{\vec{V} = 4xy\,\hat{i} + 2(x^2 - y^2)\,\hat{j}}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$w = 0$

$u = 4xy$

$v = 2(x^2 - y^2)$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(4xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left[2(x^2-y^2)\right]$$

$$= 4y - 4y = 0 \Rightarrow$$ تراکم ناپذیر

$$\nabla \times \vec{V} = 2\omega_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2(x^2-y^2)\right) - \frac{\partial}{\partial y}(4xy) = 4x - 4x = 0$$

$\Rightarrow$ غیرچرخشی

سوال- ارسال پاسخ به ایمیل در یک هفته

- الف) از ریاضیات کرل و دیورژانس یک بردار که معادل ضرب خارجی و داخلی نابلا و بردار مربوطه است را تعریف کنید.
- ب) مفهوم فیزیکی دیورژانس بردار سرعت و کرل را توضیح دهید.
- ج) راجع به تشابه و تفاوت مقدار دیورژانس ورتیسیتی با دیورژانس سرعت بحث کنید.

تنش‌های برشی

- ✓ در جریان‌های نیوتنی، تنش‌های برشی از قانون ویسکوزیته نیوتن استفاده می‌شود که بیانگر وجود رابطه خطی بین تنش‌های برشی و نرخ تغییر شکل‌های زاویه‌ای می‌باشد.

$$\begin{array}{lcl} \tau_{xy}=\tau_{yx} & & \dot{\gamma}_{xy} \\ \tau_{xz}=\tau_{zx} & \mu \propto & \dot{\gamma}_{xz} \\ \tau_{yz}=\tau_{zy} & & \dot{\gamma}_{yz} \end{array}$$

$$\dot{\gamma}=\frac{d\theta}{dt}=\frac{du}{dy}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\dot{\gamma}_{xy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu\dot{\gamma}_{zx}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\dot{\gamma}_{zy}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

تنش‌های عمودی

- برای تنش‌های عمودی، ناویر و استوکس فرضیه تابع خطی بودن تنش‌ها با نرخ تغییر شکل‌ها را استفاده نمودند و با اعمال شرط تقارن و قانون ویسکوزیته نیوتن روابط مربوط به تنش‌های عمودی بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\nabla\cdot\vec{V} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\nabla\cdot\vec{V} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\nabla\cdot\vec{V} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}$$

- در فشارهای معمول و نه خیلی بالا مقدار زیر تقریب خوبی می‌باشد.

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

- (توضیح بیشتر در کتابهای پیشرفته تر مثل جریان لزج وایت)