مکانیک سیالات ۲

آنالیز ابعادی و تشابه

میثم سعیدی-استادیار گروه مهندسی مکانیک

آنالیز ابعادی و تشابه: آنالیز ابعادی جهت تعمیم نتایج حاصل از روشهای تجربی و عددی استفاده می‌شود.

تشابه سازی یا تشابه دینامیکی: مطالعه عملکرد نمونه اصلی با استفاده از نتایج بدست آمده روی مدل در آزمایشگاه در پروژه‌های بزرگ جهت بررسی صحت طراحی احتیاج به مدل ریاضی و مدل فیزیکی می‌باشد.

بی بعد کردن معادلات: این کار با استفاده از پارامترهای مشخصه در مسأله فیزیکی مورد نظر که مقادیرشان در یک مسأله خاص ثابت است انجام می‌پذیرد. با استفاده از پارامترهای مشخصه، معادلات حاکم بی بعد شده و پارامترهای بی بعد حاکم بدست می‌آیند.

مثلاً: $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ معادله مومنتم یک بعدی جریان سیال

فرض می‌کنیم V_∞ مقدار مشخصه (یا مقدار ثابت) باشد و L پارامتر مشخصه دیگر باشد:

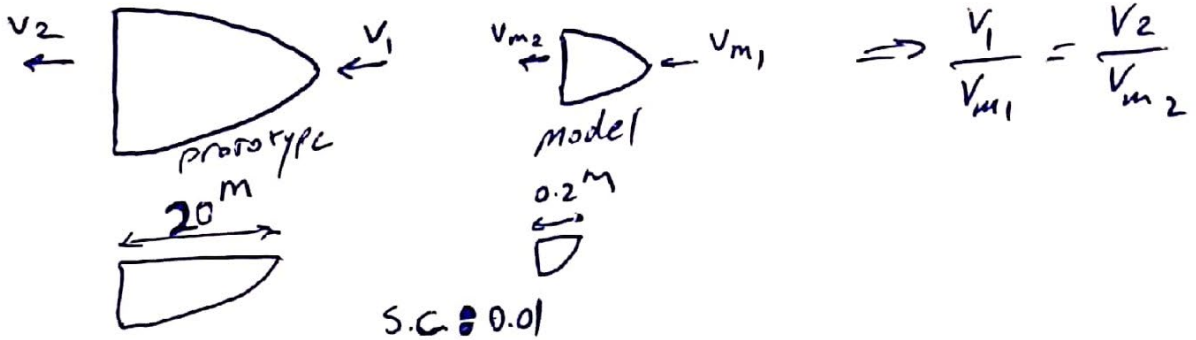
$$\frac{V_\infty}{\frac{L}{V_\infty}}\cdot\frac{\partial(u/V_\infty)}{\partial\left(\frac{t}{L/V_\infty}\right)} + \frac{V_\infty^2}{L}\left(\frac{u}{V_\infty}\right)\frac{\partial(u/V_\infty)}{\partial(x/L)} = -\frac{V_\infty^2}{L}\frac{\partial\left(\frac{p}{\rho V_\infty^2}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L}\right)} + \nu\frac{V_\infty}{L^2}\frac{\partial^2\left(\frac{u}{V_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L}\right)^2}$$

$$\begin{cases} \frac{u}{V_\infty} = u^* \\ \frac{x}{L} = x^* \\ \frac{p}{\rho V_\infty^2} = p^* \\ \frac{t}{L/V_\infty} = t^* \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \underbrace{\frac{\nu}{L V_\infty}}_{1/Re} \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \qquad Re = \frac{V_\infty L}{\nu}$$

شرایط یک مدل مناسب:

۱- مدل (Model) و پروتوتایپ (prototype) باید از نظر هندسی شبیه باشند یعنی نسبت ابعاد، سطوح و حجم‌ها و ... یکسان باشد.

۲- مدل و پروتوتایپ (سازه اصلی) باید از نظر سینماتیک و دینامیک شبیه باشند. یعنی بین سرعت و نیروها و ... مکان‌های مشخص از مدل و پروتوتایپ نسبت ثابتی برقرار باشد.

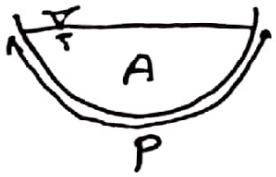


$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_{m1}} = \frac{V_2}{V_{m2}}$$

۳ اما همه پارامترها را نمی‌توان scale کرد مانند نرخ دستگیری.
اگر بتوان این کار را کرد بهترین حالت مقاومت بود که معمولاً ناممکن است.
اگر S.C : سیستم بتواند خود پروتوتایپ را آزمایش کند بهترین حالت است که این کار زمان انجام آن کوتاه شود
که تولید انبوه باشد و اشکالات موجود باشد.

تعریف آنالیز ابعادی: عبارت است از ریاضیات ابعاد و کمیت‌هایی که به کمک آن مسائل به شرح زیر را می‌توان بررسی کرد:
۱- مدل سازی ۲- تبدیل دستگاه آحاد به یکدیگر ۳- بسط معادلات هیدرولیکی

مثال: سرعت جریان آب در یک کانال از رابطه $V = C\sqrt{RS}$ بدست می‌آید که در آن C ضریب شزی، $R = \frac{A}{P}$ شعاع هیدرولیکی و S شیب کف کانال می‌باشد. اگر C در دستگاه بین‌المللی برابر 70 باشد



$$C = \frac{V}{\sqrt{RS}} \Rightarrow C = \frac{L t^{-1}}{\sqrt{\frac{L^2}{L} \times 1}} = L^{1/2} t^{-1}$$

در دستگاه برتانیایی چقدر است؟

L → طول
M → جرم
t → زمان

$$\frac{m}{ft} = 3.28$$

$$\frac{s}{s} = 1$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{3.28 \times 1} \times 70 = 126.7 \ ft^{1/2}/s$$

مثال: مطلوبست تعیین معادله مسافت پیموده شده برای جسم در حال سقوط آزاد در زمان t در صورتیکه بدانیم این مسافت تابعی از وزن جسم، شتاب ثقل و زمان است.

حل: به کمک آنالیز ابعادی معادله را بدست می آوریم:

$$y = f(w, g, t) \Rightarrow y = k w^a g^b t^c \quad , \quad \begin{cases} a = ? \\ b = ? \\ c = ? \\ k = ? \end{cases}$$

(با فرض عدد ثابت)

$$y \longrightarrow L$$

$$w \quad MLT^{-2}$$

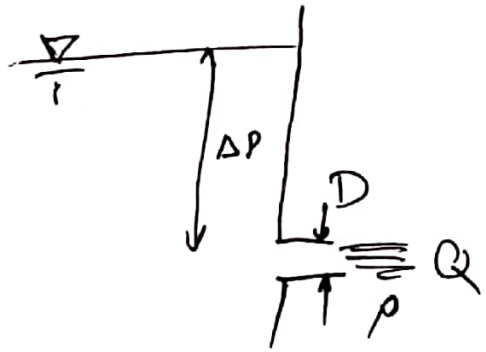
$$g \quad LT^{-2}$$

$$t \quad t$$

$$\Rightarrow L = 1 \times (MLT^{-2})^a \cdot (LT^{-2})^b \cdot t^c \Rightarrow \begin{cases} 1 = a + b \\ 0 = a \\ 0 = -2a - 2b + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 0, b = 1, c = 2 \Rightarrow y = k g t^2 \xrightarrow{\text{طبق آزمایش}} y = \frac{1}{2} g t^2$$

مثال: دبی خروجی از یک روزنه تابع از ρ و D و ΔP باشد. معادله دبی خروجی را بیابید.



$$\Rightarrow Q = f(D, \rho, \Delta P) = k \rho^{a} D^{b} \Delta P^{c}$$

$$L^3 T^{-1} = 1 \times (L^{-3} M)^{a} \times (L)^{b} \times (M L^{-1} T^{-2})^{c}$$

Q	$L^3 T^{-1}$
ρ	$M L^{-3}$
D	L
ΔP	$M L^{-1} T^{-2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow Q = k \frac{D^2 \sqrt{\Delta P}}{\sqrt{\rho}} \qquad \Delta P = \gamma h$$

$$\Rightarrow Q = \frac{k}{\sqrt{2}} D^2 \sqrt{2gh} \quad , A = \frac{\pi}{4} D^2 \Rightarrow Q = C_d \sqrt{2gh}$$

قضیه پی باکینگهام π - Buckingham :

از ترکیب متغیرهای تعیین شده در مسأله فیزیکی مورد نظر، پارامترهای بی بعد حاکم را بدست می آوریم که تعداد آنها کمتر از تعداد متغیرهای اولیه تعیین شده است.

اگر کمیت های دخیل در مسأله معلوم باشند $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ داریم: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

حال بجای تابع f تابع دیگری می توان یافت که کمیت های آن بی بعد باشند:

$g(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}) = 0$ که در آن $\{\pi\}$ پارامترهای بی بعد هستند

روش یافتن پارامترهای بی بعد:

به کمیتی که نمی‌توان یکی را برحسب دیگری بیان کرد

۱- کمیت‌های فیزیکی دخیل در مسأله را شناسایی کرده آنها را بصورت ابعادی نوشته و کمیت‌های مستقل را تعیین می‌کنیم (تعداد k)

۲- k تا از کمیت‌های دخیل در مسأله را که در مجموع شامل ابعاد اصلی هستند عنوان متغیرهای تکراری برمی‌گزینیم.

۳- حاصلضرب متغیرهای تکراری با نمای مجهول و یکی از کمیت‌های باقیمانده را با توان ۱ برابر Π قرار می‌دهیم. در مجموع $n-k$ پارامتر π و $n-k$ معادله خواهیم داشت.

۴- معادلات را بصورت ابعادی نوشته و توان‌های مجهول و در نهایت Πها حاصل می‌شوند.

۵- معادله‌ای بصورت $g(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) = 0$ جواب مسأله می‌باشد.

* با استفاده از نتایج تجربی بدست آمده بین پارامترهای بی‌بعد، رابطه صحیح با استفاده از برازش منحنی بصورت رابطه صریح جبری قابل دستیابی خواهد بود.

* اگر بعضی از کمیت‌های دخیل در مسأله خود بی‌بعد باشند می‌توان آن کمیت را به عنوان یکی از Πها در نظر گرفت.

* اگر دو کمیت دخیل در مسأله هم بعد باشند می‌توان نسبت آنها را به عنوان یکی از Πها انتخاب کرد.

مثال: نیروی کشش روی یک استوانه صاف با ارتفاع نامحدود ثابت. مطلوب رابطه ضمنی بین پارامترهای بی‌بعد آن.

$$F_D = f(L, D, \rho, V, \mu)$$

$$[F_D] = MLt^{-2}$$
$$[L] = L$$
$$[D] = L$$
$$[\rho] = ML^{-3}$$
$$[V] = Lt^{-1}$$
$$[\mu] = ML^{-1}t^{-1}$$

$\Rightarrow n = 6$

$M, L, t \Rightarrow k = 3$

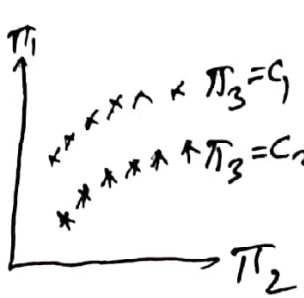
$n - k = 3$ تعداد پارامترهای بی‌بعد

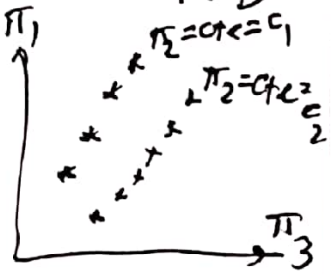
حال سه پارامتر را که نمی‌توان یک بی‌بعد دیگر ساخت مثلاً ρ, V, D تعریف کرده و انتخاب می‌کنیم.

$$\Rightarrow \pi_1 = F_D \cdot \rho^a V^b D^c = M^0 L^0 t^0$$
$$\Rightarrow ML t^{-2} M^a L^{-3a} L^b t^{-b} L^c = M^0 L^0 t^0$$
$$\Rightarrow a = -1, b = -2, c = -2$$
$$\Rightarrow \pi_1 = F_D / \rho V^2 D^2$$

$$\pi_2 = L \cdot D^a V^b \rho^c \Rightarrow M^0 L^0 t^0 = L \cdot L^a \cdot L^b t^{-b} \cdot M^c L^{-3c}$$
$$\Rightarrow c = 0, b = 0, a = -1 \Rightarrow \pi_2 = \frac{L}{D}$$

$$\pi_3 = \mu D^a V^b \rho^c \Rightarrow ML^{-1}t^{-1} = ML^{-1}t^{-1} L^a L^b t^{-b} M^c L^{-3c}$$
$$\Rightarrow a = -1, b = -1, c = -1 \Rightarrow \pi_3 = \frac{\mu}{\rho V D}$$





$$\Rightarrow f_1\left(\frac{L}{D}, \frac{\mu}{\rho V D}, \frac{F_D}{\rho V^2 D^2}\right) = 0$$

چون هنوز یک تابع مجهول دیگر در معادله وجود دارد می‌توان گفت که هیچ‌یک از پارامترها را از دو تابع مجهول اولیه حذف کنیم

$$F_D = \rho V^2 D^2 \cdot f\left(\frac{L}{D}, \frac{\mu}{\rho V D}\right)$$

مثال: ارتفاع بالا روی در لوله‌ای می‌بینه با رابطه زیر داده شده است. با استفاده از بی‌بعد کردن رابطه ضمنی بین آنها را بنویسید

$h = f(\beta, \gamma, d, \sigma)$ $\quad [h] = L$, $[\gamma] = ML^{-2}t^{-2}$, $[d] = L$, $[\beta] = 1$, $[\sigma] = MT^{-2}$

$n = 5$ ⇐

تعداد ابعاد مستقل $k = 2$ [چرا؟ طی بندازید]

L ↖ ↙ MT^{-2}

$\Rightarrow n - k = 5 - 2 = 3$ سه عدد بی‌بعد داریم

$\Pi_1 = \beta$; $\Pi_2 = \frac{h}{d}$, $\Pi_3 = \gamma d^{a} \sigma^{b} \Rightarrow ML^{-1}T^{0} = M^{b} L^{-2b} T^{-2b} L^{a} \Rightarrow a = 2, b = -1 \Rightarrow \Pi_3 = \frac{\gamma d^2}{\sigma}$

$\Rightarrow f_1\left(\frac{\gamma d^2}{\sigma}, \beta, \frac{h}{d}\right) = 0 \Rightarrow h = d \cdot f\left(\beta, \frac{\gamma d^2}{\sigma}\right)$

چند نکته در انتخاب متغیرها: برای پارامترهای بی بعد خواهیم داشت:

الف) انتخاب متغیرها:
۱- متغیرهای هندسی مثلاً اگر جریان روی کره است در این حالت قطر کافی است.
۲- متغیرهای مربوط به خواص میدان نیروهای مثل چگالی
۳- متغیرهای مربوط به آثار محیط روی سیستم: بین محیط و سیستم می‌تواند حرارت مبادله شده و کار رد و بدل شود. در این حالت باید نیروهای ناشی از جاذبه، فشار، تراکم پذیری و ... را بررسی کرد.

$F_p \propto P$ $F_\sigma \propto \sigma$ $F_g \propto g$ $F_c \propto E_v$ $F_I \propto V$

نیروی اینرسی — نیروی ارتعاش جریان

ب) تعداد پارامترهای بی بعد ثابت بوده ولی شکل آنها وابسته به شکل انتخاب پارامترهای تکرار شونده است.

ج) می‌توان هریک از پارامترهای بی بعد به دست آمده را بصورت حاصلضرب خود پارامتر با توان‌های دلخواه از پارامترهای دیگر جایگزین کرد:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3) \Longrightarrow \Pi_2' = \Pi_2^{\alpha} \cdot \Pi_3^{\beta} \cdot \Pi_1^{\gamma}$$

* اگر در یک مسأله فقط یک پارامتر بی بعد داشته باشیم هیچ‌گاه تابع ثابت نداریم.

د) تعیین ابعاد مستقل: با استفاده از یکی از سیستم‌های ابعاد $[FLt]$ و $[MLt]$

نیروی جرم

اعداد بی بعد معروف در مکانیک سیالات :

قبل از معرفی اعداد بی بعد نیروهای معروف را بصورت پارامتری بعد داری می نویسیم. این کار بطور ساده بصورت ابعادی نوشته می شود :

نیروی اینرسی : $F_I = m\frac{dV}{dt} = \rho L^3 \frac{V}{t} = \rho L^2 V^2$

نیروی چسبندگی (ناشی از تنش برشی) : $F_\tau = \mu \frac{dV}{dy} A = \mu \frac{V}{L} L^2 = \mu V L$

نیروی تراکم پذیری : $F_c = E_v A = E_v L^2$

نیروی فشار : $F_p = \Delta P . A = L^2 \Delta P$

نیروی کشش سطحی : $F_\sigma = \sigma . L$

نیروی جاذبه : $F_g = mg = \rho L^3 g$

1) عدد رینولدز Reynold's number : نسبت نیروهای اینرسی به نیروهای چسبندگی را عدد رینولدز می‌گویند.

$$Re = \frac{F_I}{F_\tau} = \frac{\rho V^2 L^2}{\mu V L} = \frac{\rho V L}{\mu}$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{VL}{\nu}}$$

V: سرعت مشخصه (در جریان لوله یا بصورت متوسط سطح مقطع)

L: طول مشخصه
- قطر لوله : لوله
- قطر کره : کره
- طول صفحه : صفحه تخت

*نوع رژیم جریان توسط عدد رینولدز مشخص می‌شود.

منظور از رژیم جریان آرام و آشفته است.

۲) عدد وبر : Weber number : نسبت نیروهای اینرسی به نیروهای ناشی از کشش سطحی را عدد وبر گویند.

$$We = \frac{F_I}{F_\sigma} = \frac{\rho V^2 L^2}{\sigma L} = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$$

$$\boxed{We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}}$$

* اگر در جریانی که کشش سطحی داریم عدد وبر خیلی کوچک باشد یعنی نیروی کشش سطحی غالب است بر اینرسی یعنی حالت صلب دارد و اگر عدد وبر بزرگتر از یک باشد یعنی نیروی کشش سطحی کمتر از نیروی اینرسی است و تغییر شکل به راحتی صورت می‌گیرد.

۴) عدد کوشی : Cauchy number نسبت نیروهای اینرسی به نیروهای تراکم پذیری را عدد کوشی گویند.

$$Ca = \frac{F_I}{F_C} = \frac{\rho V^2 L^2}{E_v L^2} \Rightarrow \boxed{Ca = \frac{\rho V^2}{E_v}}$$

$$C^2 = \frac{E_v}{\rho} \Rightarrow \boxed{Ca = \frac{V^2}{C^2}}$$

کاربرد: در جریان‌های تراکم پذیر

۱۴) عدد ماخ Mach number :

$$Ma = \sqrt{Ca} = \sqrt{\frac{F_i}{F_c}} = \frac{V}{C}$$

$$\boxed{Ma = \frac{V}{C}}$$

* جریان ها را از نظر تراکم پذیری با عدد ماخ تقسیم بندی می کنند :

$Ma < 0.3$ تراکم ناپذیر

$0.3 < Ma < 1$ Sub sonic Flow جریان تحت صوت

$Ma = 1$ Sonic Flow جریان صوت

$Ma > 1$ Supersonic Flow جریان فوق صوت

۵) عدد اویلر Euler's number :

نسبت نیروهای ناشی از فشار به نیروهای ناشی از اینرسی را عدد اویلر گویند.

Pressure Coefficient

$$Eu = 2C_p = \frac{F_p}{F_I} = \frac{\Delta P \cdot L^2}{\rho V^2 L^2} = \frac{\Delta P}{\rho V^2} \Rightarrow \boxed{Eu = \frac{\Delta P}{\rho V^2}}, \quad \boxed{C_p = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}}$$

ضریب فشار

ضریب فشار Eu = هد استاتیک / هد دینامیکی

$$\Delta P = P - P_\infty$$

فشار میدان — فشار در نقاط مختلف

$V \uparrow \Rightarrow P \downarrow \Rightarrow$ تغییر سیال $\Rightarrow$ رسیدن به سطح بالاتر زودتر $\Rightarrow$ حرکت بخار به نقاط دیگر همراه جزء سیال $\Rightarrow$ خلأ $\Rightarrow$ سیفون

در نتیجه سرعت زیاد در نزدیکی سطح بالا، زیاد خلأ بوجود می‌آید

$\Rightarrow$ پس از مدتی در اثر ضربه سیال به دریچه، دریچه می‌شکند

این پدیده در لوله‌ها، پره‌ها و کشتی‌ها در آب اتفاق می‌افتد و برای جلوگیری باید دبی سیال را کنترل کرد.

۷) عدد استروهال Strouhal number :

$$St = \frac{\omega L}{V}$$

ω: فرکانس نوسان

V: سرعت ترول

$$St = \frac{m \frac{dv}{dt}}{m \frac{v^2}{L}} = \frac{L}{Vt} = \frac{\omega L}{V}$$

از ترم خطی

از ترم زاویه‌ای

* در لوله‌ها نیروی مقاوم نرخت است و از Re استفاده می‌شود. در لوله‌های مویین یا روزنه‌ها که نیروی مقاوم کشش سطحی است We مهم است. جایی که تراکم‌پذیری سیال مهم است اعداد Ma, Ca اهمیت پیدا می‌کنند.

تشابه : Similarity

شرایط لازم برای تشابه هیدرولیکی بین مدل (Model) و نمونه اصلی (Prototype) :

۱) تشابه هندسی : Geometric similarity تناسب ابعاد طولی (خطی) متناظر در مدل و نمونه اصلی با یک نسبت بهم مربوط شوند

$$\frac{(L_1)_m}{(L_1)_p} = \frac{(L_2)_m}{(L_2)_p} = \dots = \frac{(L_n)_m}{(L_n)_p} \Rightarrow \left(\frac{L_1}{L_2}\right)_m = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)_p \;,\; \left(\frac{L_1}{L_3}\right)_m = \left(\frac{L_1}{L_3}\right)_p \;,\; \dots$$

* برای برقراری تشابه هندسی باید همه نسبت‌های بی‌بعد هندسی در مدل و نمونه اصلی با هم مساوی باشند.

$$\frac{L_m}{L_p} = S.C \qquad \frac{A_m}{A_p} = (S.C)^2 \qquad \frac{\forall_m}{\forall_p} = (S.C)^3$$

۲) تشابه سینماتیکی (kinematic similarity) : باید راستای سرعت و در نقاط متناظر مدل و نمونه اصلی یکسان بوده و نسبت مقادیر آنها با یک ضریب بهم مربوط شوند: