مکانیک سیالات۲

جریان داخلی

میثم سعیدی-استادیار گروه مهندسی مکانیک

انواع جریان‌های داخلی Internal Flows

- ✓ جریان آرام یا لایه‌ای Laminar Flow
- ✓ جریان آشفته یا درهم Turbulent Flow

- ✓ عدد رینولدز نوع رژیم جریان را مشخص می‌کند.

$Re \leq 2300$ جریان آرام

$Re \geq 4000$ جریان آشفته

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

L: طول مشخصه

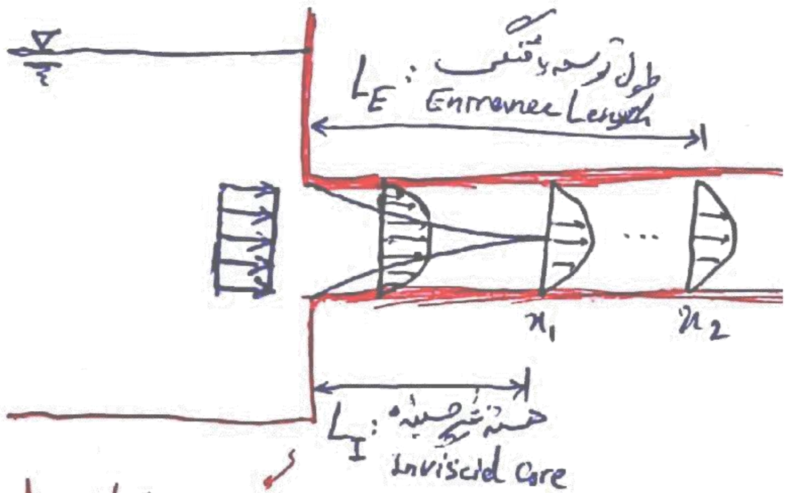
در جریان‌های داخلی لوله : $L = D$

انواع جریان بر حسب عدد رینولدز

- ✓ Re<1: جریان خزشی (Creeping) است و در این حالت جریان کاملا چسبنده بوده و نیروهای اینرسی ناچیز هستند.
- ✓ 1<Re<100: جریان چسبنده بوده و شدیدا وابسته به عدد رینولدز می‌باشد و نمی‌توان از تئوری لایه مرزی استفاده نمود.
- ✓ 100<Re<1000: جریان آرام و چسبنده بوده و می‌توان تئوری لایه مرزی را استفاده نمود.
- ✓ 1000<Re<10000: در این حالت جریان گذار می باشد.
- ✓ 10000<Re<1000000: جریان آشفته بوده و می‌توان از تئوری لایه مرزی استفاده نمود.
- ✓ Re>1000000: جریان کاملا آشفته بوده و وابستگی به عدد رینولدز بسیار جزئی و نیروی چسبندگی قابل صرفنظر می باشد.

جریان در ورودی لوله‌ها (Entrance Flow)

- از x_2 به بعد را ناحیه کاملا توسعه یافته (Fully Developed) گوییم. در این ناحیه پروفیل سرعت در جهت جریان تغییر نمی‌کند.



$L_I \approx \frac{1}{4} L_E$

شرط توسعه یافتگی : $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$L_E = f(\rho, V, \mu, D)$ $\quad \frac{L_E}{D} = f(Re)$ $\quad Re = \frac{\rho V D}{\mu}$

سرعت متوسط داخل لوله — قطر لوله

جریان آرام (لایه‌ای) : $\frac{L_E}{D} = 0.06\, Re$ $\quad$ جریان آشفته (توربولانس) : $\frac{L_E}{D} = 1.6\, Re^{\frac{1}{4}}$

طول توسعه یافتگی بین دو صفحه : $\frac{L_E}{H} = 0.04\, Re$ (آرام) $\quad Re = \frac{\rho V H}{\mu}$ فاصله بین دو صفحه

معادلات حرکت در مختصات استوانه‌ای

مختصات کارتزینی (x, y, z) (u, v, w)

مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) (u_r, u_θ, u_z)

معادله پیوستگی $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

$$V \cdot \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

معادلات حرکت در مختصات استوانه‌ای (ادامه)

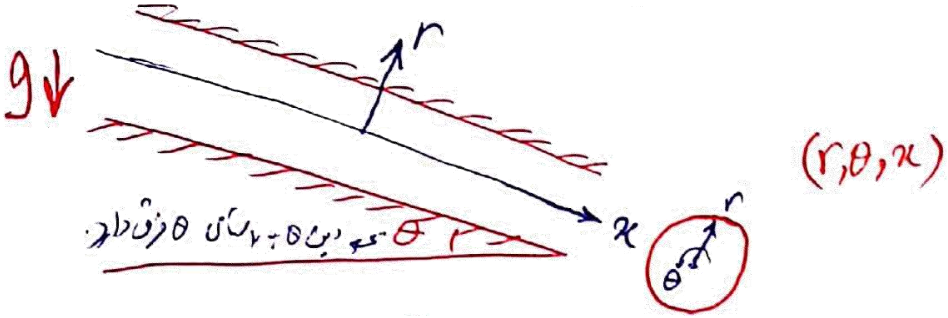
معادله بقای مومنتوم

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)v_r-\frac{1}{r}v_\theta^2=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+g_r+\nu\left(\nabla^2 v_r-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)v_\theta+\frac{1}{r}v_r v_\theta=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+g_\theta+\nu\left(\nabla^2 v_\theta-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)v_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+g_z+\nu\nabla^2 v_z$$

جریان آرام توسعه یافته داخل لوله



- ✓ فرض: جریان آرام، تراکم ناپذیر، توسعه یافته، دائمی و یک بعدی در راستای X

$$\nabla\cdot\vec{V}=0 \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cancel{u_r}) + \frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$ توسعه یافته

معادله مومنتوم در جهت x برای مختصات استوانه‌ای:

$$\rho\left[\cancel{\frac{\partial u_x}{\partial t}} + \cancel{u_r}\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\cancel{u_\theta}}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x\cancel{\frac{\partial u_x}{\partial x}}\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_x}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}\right] + \rho g_x, \quad g_x = g\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_x}{\partial r}\right) + \rho g\sin\theta = 0} \quad (1)$$

جریان آرام توسعه یافته داخل لوله (ادامه)

مومنتم در جهت r :
$$\rho\left[\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+u_x\frac{\partial u_r}{\partial x}-\frac{u_\theta^2}{r}\right]=-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right]-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right\}+\rho g_r$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho g_r=0} \quad ۲$$

مومنتم در جهت θ :
$$\rho\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u\frac{\partial u_\theta}{\partial x}+\frac{u_r u_\theta}{r}\right]=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\mu\left\{\left[\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}\right]-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right\}+\rho g_\theta$$

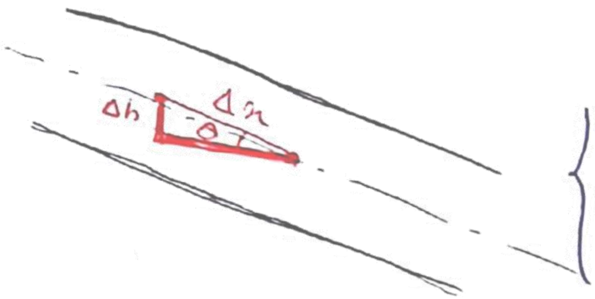
$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\rho g_\theta=0} \quad ۳$$

جریان آرام توسعه یافته داخل لوله (ادامه)

The flow proceeds straight down the pipe without radial motion.

معادله ۱ بصورت زیر نوشته میشود

$$\frac{\partial(P+\gamma x\sin\theta)}{\partial x}=\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)$$



$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{\Delta h}{\Delta x}=\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{dh}{dx}\\ h=x\sin\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial(P+\gamma h)}{\partial x}=\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)=\text{Cte}$$

چون یک طرف تابع x و یک طرف تابع r است.

u_x

$$r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(P+\gamma h)}{\partial x}\frac{r^2}{2}+C_1\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial(P+\gamma h)}{\partial x}r+\frac{C_1}{r}$$

$$\Rightarrow u=\frac{1}{4\mu}\frac{\partial(P+\gamma h)}{\partial x}r^2+C_1\ln r+C_2$$

جریان آرام توسعه یافته داخل لوله (ادامه)

B.C. :
شرایط مرزی

$$u(r=R)=0$$

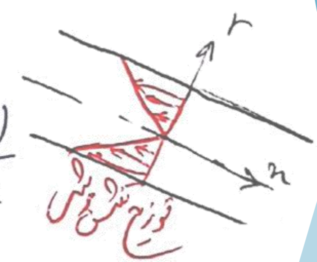
$$u(r=0)= \text{محدود} \ \text{یا} \ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0}=0 \Rightarrow C_1=0$$

$$u(r=R)=0 \Rightarrow \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial(P+\gamma h)}{\partial x}R^2\right)+C_2=0 \Rightarrow C_2=-\frac{1}{4\mu}\frac{\partial(P+\gamma h)}{\partial x}R^2$$

$$\Rightarrow u=-\frac{1}{4\mu}\frac{\partial(P+\gamma h)}{\partial x}\left(R^2-r^2\right)$$

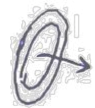
توزیع تنش برشی :

$$\tau_{rx}=\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\mu\frac{\partial u}{\partial r} \Rightarrow \tau_{rx}=\frac{r}{2}\frac{\partial(P+\gamma h)}{\partial x}$$



جریان آرام توسعه یافته داخل لوله (ادامه)

دبی حجمی: $Q=\int_A \underbrace{\vec{V}}_{u\hat{i}_x}\cdot \underbrace{d\vec{A}}_{2\pi r dr\, \hat{i}_x} = \int_0^R 2\pi r u\, dr$



$$= \int_0^R 2\pi r\left[\frac{-1}{4\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}(R^2-r^2)\right]dr = \frac{-\pi}{2\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}\int_0^R r(R^2-r^2)\,dr$$

$$= \frac{-\pi}{2\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}\int_0^R r(R^2-r^2)\,dr = \frac{-\pi}{2\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}\left[\frac{r^2R^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \frac{-\pi R^4}{8\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}}$$

سرعت متوسط: $\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{-R^2}{8\mu}\left(\frac{d(P+\gamma h)}{dx}\right)$

سرعت ماکزیمم: $u\big|_{r=0} = \frac{-R^2}{4\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}$

در جریان آرام داخل لوله سرعت ماکزیمم دو برابر سرعت متوسط

$u_{max} = 2\bar{u}$

در روابط فوق $\frac{d(P+\gamma h)}{dx}$ منفی است. می‌توان بجای آن از $\Delta P = P_1 - P_2$ که عبارت مثبت است استفاده نمود و منفی را از روابط برداشت.

افت انرژی در جریان داخل لوله

$$\underbrace{f}_{\text{ضریب اصطکاک دارسی ویسباخ}} = \frac{4\tau_w}{\frac{1}{2}\rho \underbrace{V^2}_{\text{سرعت متوسط}}}$$

$$\tau_w\Big|_{r=R} = \frac{R}{2}\frac{\Delta P}{L}$$

از طرفی میدانیم $\frac{\Delta P}{L} = \frac{8\mu V}{R^2} \Rightarrow \tau_w = \frac{R}{2}\frac{8\mu V}{R^2} = \frac{4\mu V}{R}$

$$\Rightarrow f = \frac{16\mu V/R}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{32\mu}{\rho V R} = \frac{64\mu}{\rho V D} = \frac{64}{Re} \Rightarrow \boxed{f = \frac{64}{Re}}$$

در جریان آرام

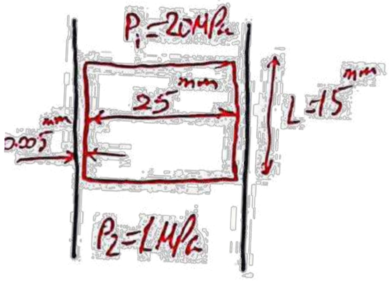
$$f = \frac{\frac{D}{L}\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2} \Rightarrow \Delta P = f\frac{L}{D}\rho\frac{V^2}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta P}{\gamma} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}}$$

رابطه دارسی ویسباخ

اگر جریان آرام باشه $f = \frac{64}{Re}$ رو میذاریم.

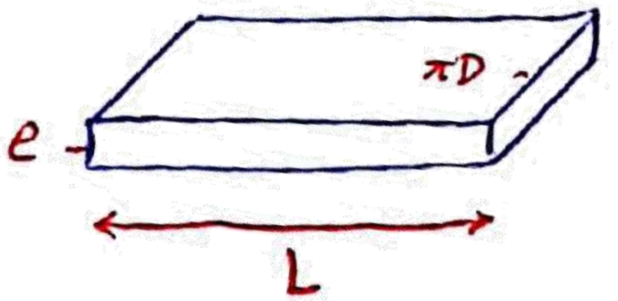
مثال:

در سیستم هیدرولیکی فشار نسبی کاری برابر 20 MPa است. روغن هیدرولیکی دارای چگالی نسبی 0.92 و ویسکوزیته $\mu = 0.018\ \frac{kg}{m.s}$ است. شیر کنترل هیدرولیکی دارای قطر 25^{mm} است. لقی شعاعی آن برابر 0.005^{mm} است. دبی حجمی نشتی روغن را در دو طرف شیر بدست آورید. طرف دیگر شیر کنترل فشار نسبی برابر 1 MPa است. طول سیلندر برابر 15^{mm} است.



حل:

می تواند با جریان بین دو صفحه مدل شود:



$$\frac{\Delta P}{L}=\frac{P_1-P_2}{L}$$

$$\frac{Q}{\pi D}=\frac{2}{3}\frac{h^3}{\mu}\frac{\Delta P}{L}\quad \left(h^3 \to \frac{e^3}{8}\right) \Rightarrow Q=\frac{2}{3}\frac{\pi D e^3\Delta P}{8\mu L}=\frac{2}{3}\,\frac{\pi\times 25^{mm}\times(0.005)^{3\,mm}\times(20-1)^{MPa}\times\frac{1^m}{10^3mm}\times\frac{1^m}{10^3mm}\times\frac{10^6Pa}{1MPa}}{8\times 0.018\frac{kg}{m\,s}\times 15^{mm}\times\frac{1^m}{10^3mm}}$$

$$\Rightarrow Q=57.6\times10^{-9}\ \frac{m^3}{s}$$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{Q}{e\pi D}=\frac{57.6\ \frac{mm^3}{s}}{0.005^{mm}\times\pi\times 25^{mm}}=147\ \frac{mm}{s}=0.147\ \frac{m}{s}$$

$$Re=\frac{\rho V e}{\mu}=\frac{0.92\times1000\times0.147\times0.005\times10^{-3}}{0.018}=0.0375$$

نیروی چسبندگی بر نیروی اینرسی غالب است.

مثال:

روغن با دانسیته $900 \, kg/m^3$ و ویسکوزیته سینماتیکی

$\nu = 0.0002 \, m^2/s$ داخل لوله شیب دار به شعاع 3^{cm} و طول 10^m

جریان دارد. فشار و ارتفاع در مقاطع ۱ و ۲ از لوله به ترتیب

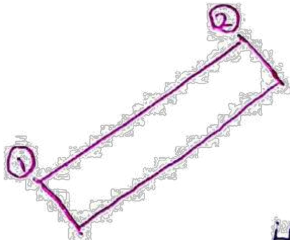
برابر است با:

$$P_1 = 350 \, kPa \;, \quad z_1 = 0$$
$$P_2 = 250 \, kPa \;, \quad z_2 = 6.43^m$$

با فرض جریان آرام و توسعه یافته داخل لوله مطلوبست

الف) جهت جریان، ب) دبی حجمی،

ج) سرعت متوسط و د) نوع رژیم جریان.



برای یافتن جهت جریان فشار و ارتفاع مهم است. بایستی مجموع فشار استاتیک و هد استاتیک بررسی شود.

Hydraulic Grade line: $HGL_1 = \frac{P_1}{\gamma} + Z_1 = \frac{350 \times 1000}{900 \times 9.8} = 39.68^m$

$$HGL_2 = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 = \frac{250 \times 1000}{900 \times 9.8} + 6.43 = 28.34 + 6.43 = 34.77^m$$

$\Leftarrow HGL_1 > HGL_2 \Leftarrow$ جهت جریان به سمت ۲ است (از ① به ②)

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta P}{L} = \frac{\pi R^4}{8\mu L}\cdot\gamma\,(HGL_1 - HGL_2) \Rightarrow Q = \frac{\pi\,(0.03)^4}{8 \times 900 \times 0.0002} \times \frac{9.8 \times 900 \times (39.68 - 34.77)}{10}$$

$$= 0.0076\,\frac{m^3}{s}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.0076}{\pi \times 0.03^2} = 2.7\ m/s$$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{VD}{\nu} = \frac{900 \times 2.7 \times 0.06}{900 \times 0.0002} = 810 \Rightarrow Re < 2300 \Rightarrow$$ رژیم جریان آرام است

کاربرد آنالیز ابعادی و بررسی افت انرژی

افت انرژی در واحد جرم $= gh_L = f(\rho, \mu, V, D, L, \varepsilon)$

با استفاده از روش آنالیز ابعادی پی-باکینگهام داریم:

$$\frac{gh_L}{V^2/2} = \underbrace{f\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, Re\right)}_{K}$$

$$K = f\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, Re\right) \rightarrow gh_L = K\frac{V^2}{2} \Rightarrow h_L = K\frac{V^2}{2g}$$

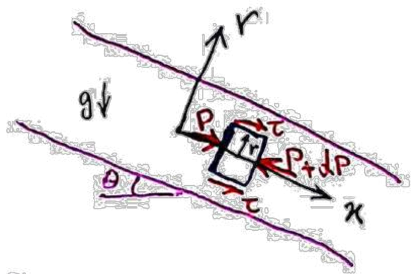
اگر جریان توسعه یافته باشد داریم:

$$\sum F = 0 \rightarrow PA - (P+dP)A + 2\pi r\,dx\,\tau + \rho\pi r^2 dx\,g\sin\theta = 0$$

$$-\overset{\pi r^2}{A}\,dP + 2\pi r\,dx\,\tau + \rho\pi r^2 dx\,g\frac{dh}{dx} = 0$$

$$-r[\underbrace{dP + \gamma dh}_{d(P+\gamma h)}] + 2\tau dx = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\tau = \frac{r}{2}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}} \rightarrow \tau_w = \frac{R}{2}\frac{\Delta P}{L} \rightarrow \tau_w = \frac{D}{4}\frac{\Delta P}{L}$$



$$K = \frac{L}{D} f\left(\frac{\varepsilon}{D}, Re\right) \Rightarrow h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

ضریب اصطکاک دارسی ویسباخ: تابع رینولدز و زبری است.

اگر جریان آرام باشد فقط تابع رینولدز است: $f = \frac{64}{Re}$

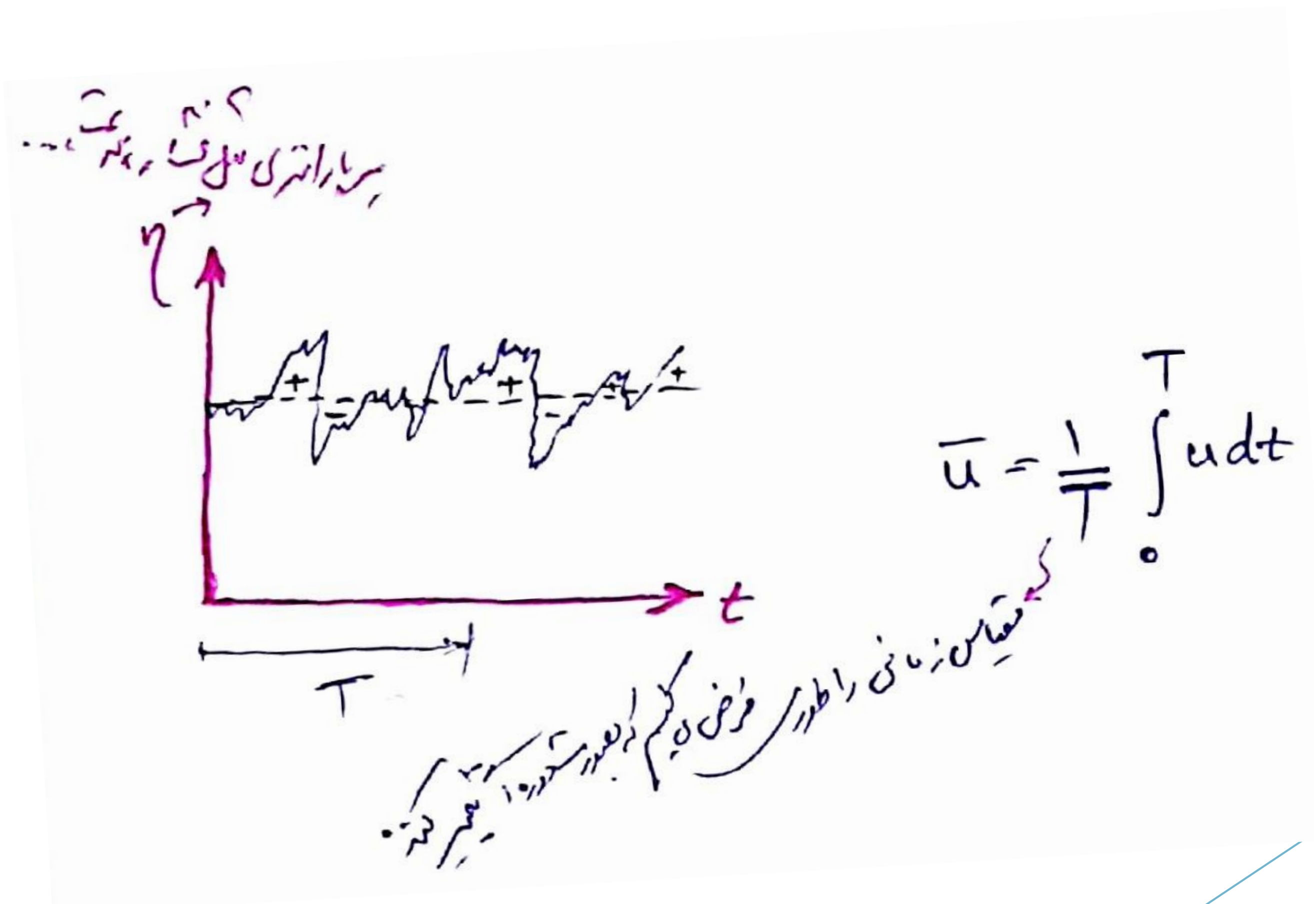
Skin Friction Coefficient

- ✓ ضریب اصطکاک قشری

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho V^2} \Rightarrow C_f = \frac{1}{4} f$$

The **skin friction coefficient** is a dimensionless skin shear stress which is nondimensionalized by the dynamic pressure of a free stream.

جریان آشفته توسعه یافته داخلی



جریان آشفته توسعه یافته داخلی

$$u = \bar{u} + u'$$

$$\bar{u} = \overline{\bar{u} + u'}$$

$$= \bar{\bar{u}} + \overline{u'}$$

$$= \bar{u} + \overline{u'} \Rightarrow \overline{u'} = 0$$

سرعت لحظه‌ای : u

سرعت متوسط : $\bar{u}$

نوسان سرعت : u'

معادله ناویر استوکس N-S : $\rho\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right] = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V}$

در راستای i : $\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 u$

در راستای j : $\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v$

در راستای k : $\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 w$

RANS

- ✓ اگر از معادله ناویر استوکس نسبت به مقیاس زمانی آشفتگی متوسط گیری کنیم معادله متوسط گیری شده رینولدز ناویر استوکس RANS بدست می آید.

مثال:

$$\overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} = \overline{(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}} = \overline{\bar{u}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\cancel{\frac{\partial u'}{\partial x}}\right]} + \overline{u'\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}} + \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}$$

$$= \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial(u'u')}{\partial x}$$

هدف از تساوی فوق نمایش نحوه ظاهر شدن عبارات موسوم به تنش آشفتگی است

برای بدست آوردن آنها باید از مفهوم نمایش تانسوری و استفاده از معادله پیوستگی استفاده شود.

نهایتا معادله ناویر استوکس بصورت مقابل حاصل می‌شود.

$$i:\ \rho\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right]=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}-\rho\overline{u'^2}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}-\rho\overline{u'v'}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}-\rho\overline{u'w'}\right]$$

$$j:\ \rho\left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right]=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}-\rho\overline{u'v'}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}-\rho\overline{v'^2}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}-\rho\overline{v'w'}\right]$$

$$k:\ \rho\left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right]=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}-\rho\overline{u'w'}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}-\rho\overline{v'w'}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}-\rho\overline{w'^2}\right]$$

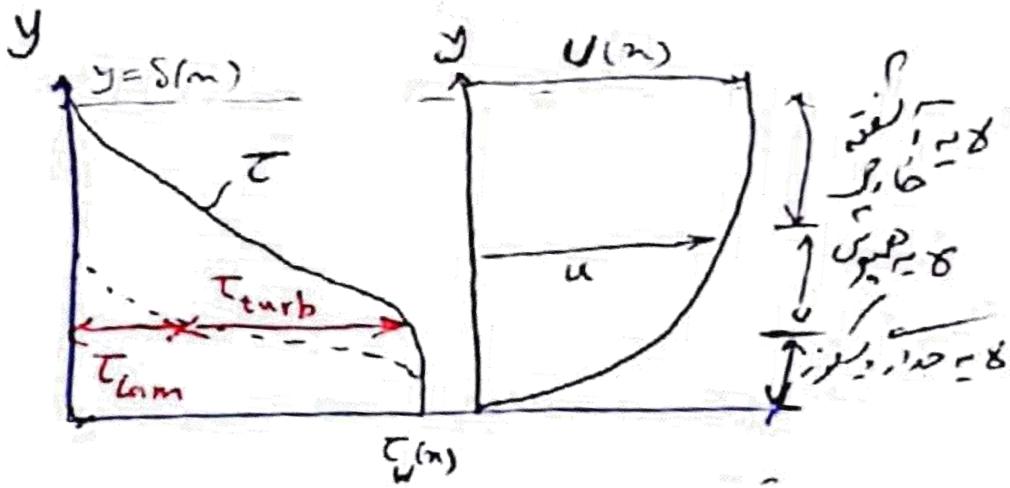
$$\tau_{Reynolds} = \begin{pmatrix} -\rho\overline{u'^2} & -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{u'w'} \\ -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{v'^2} & -\rho\overline{v'w'} \\ -\rho\overline{u'w'} & -\rho\overline{v'w'} & -\rho\overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

تنسور آشفتگی

یا تنش‌های رینولدز

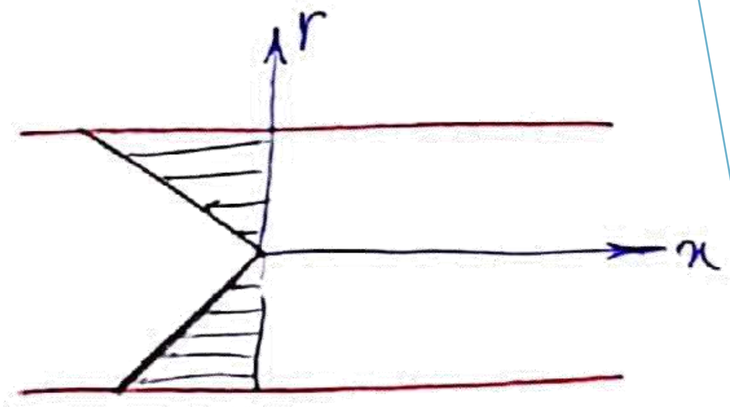
یا تنش‌های ظاهری

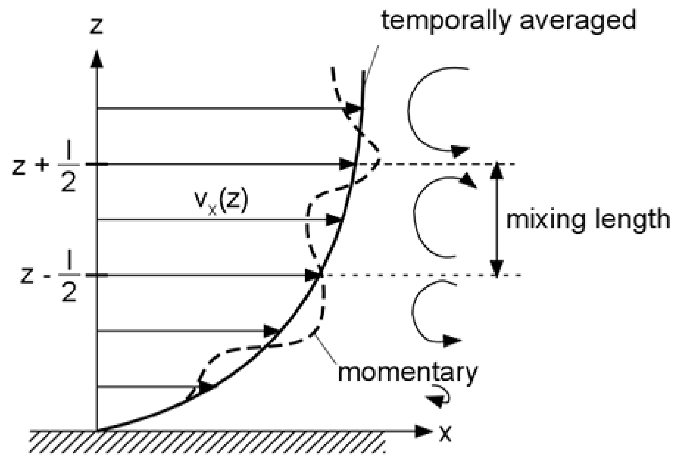
جریان آشفته توسعه یافته داخلی



توزیع سرعت و تنش برشی نزدیک دیواره

$$\tau = \mu \frac{d\bar{U}}{dy} - \rho\overline{u'v'} = \tau_{lam} + \tau_{turb}$$





* مدل‌های متنوعی برای آشفتگی وجود دارد. یکی از اولین آنها، طول اختلاط پرانتل است که در آن پرانتل با استفاده از تنش‌های رینولدز رابطه‌ای مثلاً بصورت $-\rho \overline{u'v'} = \tau_{turb} = \mu_t \frac{du}{dy}$ که در آن $\mu_t = \rho L^2 \left|\frac{du}{dy}\right|$ برده و L به عنوان طول اختلاط را می‌توان بصورت خطی $L = ky$ که در آن k عدد ثابت کارمن ($\simeq 0.41$) است در نظر گرفت. مدل‌های پیشرفته‌تر به معادلات دیگری با استفاده از حل عددی PDE ها وجود دارد.

* معمولاً برای سادگی بیان $\bar{u}$ از u استفاده می‌شود.

لایه های جریان آشفته

- جریان داخل لوله را می توان با سه لایه زیر مدل سازی نمود:
  - لایه زیرین چسبنده یا داخلی

    Viscous or Inner Layer
  - لایه رویهم یا گذرا

    Overlap or Transient Layer
  - لایه بیرونی یا آشفته

    Outer or Turbulent Layer

لایه زیرین چسبنده یا داخلی
Viscous or Inner Layer

- ✓ در این لایه که نزدیک جداره می باشد و حدود ۲٪ کل ضخامت لایه را تشکیل می‌دهد جریان آرام بوده و سهم عمده تنش برشی ناشی از جریان آرام یا اختلاط مولکولی است.

لایه رویهم یا گذرا
Overlap or Transient Layer

- ✓ در این لایه هر دو پدیده جریان آرام و آشفته موثر می‌باشند و تنش برشی از هر دو پدیده اختلاط مولکولی و اختلاط ماکروسکوپی ذرات تشکیل می‌شود.

لایه بیرونی یا آشفته
Outer or Turbulent Layer

- ✓ در این لایه صرفا جریان ناشی از پدیده آشفتگی می باشد و پدیده جریان آرام در آن نقشی ندارد و تنش برشی ناشی از اختلاط ماکروسکوپی ذرات سیال است.

مدل‌سازی لایه‌های جریان آشفته

۱- مدل‌سازی لایه داخلی

$$u = f(\tau_w, \rho, \mu, y) \xrightarrow{\text{آنالیز ابعاد}} \frac{u}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} = f\left(\frac{y\rho^{\frac{1}{2}}\tau_w^{\frac{1}{2}}}{\mu}\right)$$

$$\left(\frac{y\rho^{\frac{1}{2}}\tau_w^{\frac{1}{2}}}{\mu} = \frac{\rho y u^*}{\mu}\ \text{شبیه رینولدز}\right)$$

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Wall velocity

ابعاد شبیه سرعت است ولی سرعت واقعی نیست

$$u^+ = \frac{u}{u^*} = f\left(y^+ = \frac{y}{\nu/u^*}\right) \rightarrow \boxed{u^+ = f(y^+)}$$

بعلت ضخامت خیلی کم لایه داخلی می‌توان توزیع سرعت در داخل این لایه را بصورت خطی فرض کرد.

$$\tau_w = \mu\frac{du}{dy} = cte \qquad \frac{du}{dy} = \frac{u}{y} \qquad \tau_w = \mu\frac{u}{y} \rightarrow u = \frac{\tau_w y}{\mu} \rightarrow \underbrace{\frac{u}{u^*}}_{u^+} = \underbrace{\frac{yu^*}{\nu}}_{y^+}$$

$$\boxed{u^+ = y^+} *$$

مدل‌سازی لایه‌های جریان آشفته

۳- مدل سازی لایه جاری یا بیرونی یا آشفته :

توسط فون کارمن رابطه بالا بصورت زیر نوشته شد:

$$u = f(u_{max}, R, y, \rho, \tau_w)$$

$$u_{max} - u = f(R, y, \rho, \tau_w) \xrightarrow{\text{آنالیز ابعادی}} \frac{u_{max} - u}{u^*} = G\left(\frac{y}{R}\right)$$

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

مدل‌سازی لایه‌های جریان آشفته

۲- لایه رویهم :

توسط میلیکان رابطه زیر پیشنهاد شد :

قانون لگاریتمی :

$$u^+ = \frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y u^*}{\nu} + B$$

ثابت‌های آزمایشگاهی برای دیوار صاف : $k \approx 0.4$ ، $B \approx 5$

جریان متلاطم در لوله : کافیست بجای y مقدار $R-r$ قرار دهیم به عنوان مثال قانون لگاریتمی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{u(r)}{u^*} = \frac{1}{k}\ln\frac{(R-r)u^*}{\nu} + B$$

با فرض آنکه پروفیل سرعت لگاریتمی در سراسر لایه صادق باشد سرعت متوسط عبارتست از:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int V\cdot dA}{A} = \frac{\int_0^R 2\pi r u\,dr}{\pi R^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{V}{u^*} = 2.44\ln\left(\frac{u^*R}{\nu}\right) + 1.34}$$

$$u = 2.44\,u^*\ln\left[\frac{(R-r)u^*}{\nu}\right] + 5u^*$$

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}\cdot\frac{4\frac{V^2}{2}}{4\frac{V^2}{2}}} = \sqrt{\frac{4\tau_w}{\frac{1}{2}\rho V^2}\cdot\frac{V^2}{8}} = \boxed{\sqrt{f\frac{V^2}{8}} = \frac{V}{2}\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{2}}} \qquad \boxed{\frac{u^*R}{\nu} = \frac{V\sqrt{f}}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{D}{\nu} = \frac{\sqrt{f}}{4\sqrt{2}}Re}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.99\log(Re\sqrt{f}) - 1.02}$$

بکمک اصلاح ضرایب براساس نتایج تجربی رابطه زیر ارائه گردید:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log(Re\sqrt{f}) - 0.8}$$ دیواره کاملاً صاف

– اثر زبری دیواره و امکان تشکیل انواع لایه‌های داخلی، رویهم و بیرونی در جریان آشفته:

تعریف: $\varepsilon^+ = \dfrac{\varepsilon u^*}{\nu}$

$\varepsilon^+ \leqslant 5$: سطح از نظر میدان جریان صاف فرض می‌شود و در جریان آشفته سه لایه را خواهیم داشت و ضریب اصطکاک مستقل از زبری می‌باشد.

$5 < \varepsilon^+ \leqslant 70$: در این حالت تنها دو لایه رویهم و آشفته در میدان جریان تشکیل می‌شود و ضریب اصطکاک به زبری سطح و عدد رینولدز وابسته است.

$\varepsilon^+ > 70$: در این حالت جریان تنها لایه بیرونی یا آشفته را دارد و سطح از نظر میدان جریان سیال کاملاً زبر محسوب می‌شود. ضریب اصطکاک مستقل از عدد رینولدز می‌باشد.

* برای حالت کاملاً زبر که ضریب اصطکاک مستقل از عدد رینولدز است می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{\varepsilon/d}{3.7}\right)$$

* برای لوله نه کاملاً صاف و نه کاملاً زبر کلبروک رابطه زیر را پیشنهاد نمود که رابطه‌ای پذیرفته شده برای جریان آشفته بوده و نمودار مودی را بر اساس آن رسم می‌کنند.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left[\frac{\varepsilon/d}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\right]$$

توضیح دیاگرام مودی

محور عمودی سمت چپ ضریب اصطکاک دارسی ویسباخ را نشان می دهد.

محور افقی عدد رینولدز را نشان می دهد. $Re = \frac{Vd}{\nu}$ که در آن $V=\frac{Q}{A}$ سرعت توسط جریان است.

محور عمودی در سمت راست دیاگرام مودی، زبری نسبی لوله را نشان می دهد. زبری نسبی $= \frac{\varepsilon}{d}$

* پروفیل سرعت قانون توانی (power law velocity) :

$$\frac{u}{U_{max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{R-r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$$

توان n تابع عدد رینولدز بوده و بصورت تقریبی می توان نوشت :

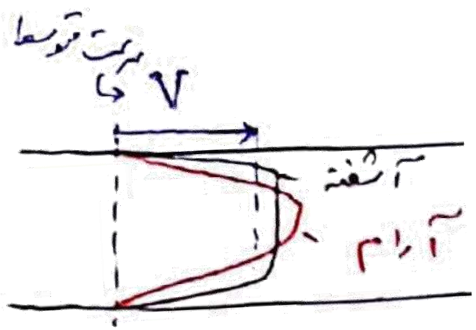
$$n \approx \frac{1}{\sqrt{f}}$$

Re	4000	2.3×10^{4}	1.1×10^{5}	1.1×10^{6}	2×10^{6}
n	5	6.6	7	9	10

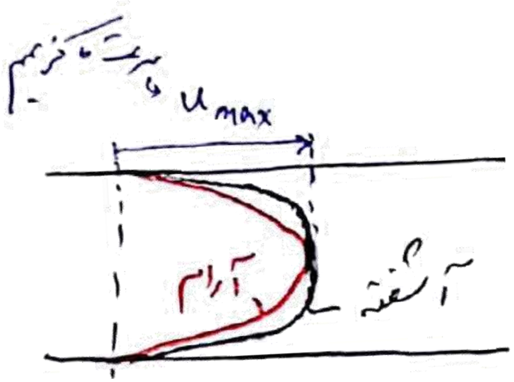
این جدول برای لوله‌های صاف ارائه شده است .

مقایسه پروفیل سرعت آرام و آشفته

- ✓ دو حالت در نظر می‌گیریم:



الف) سرعت متوسط در جریان آرام و آشفته برابرند.



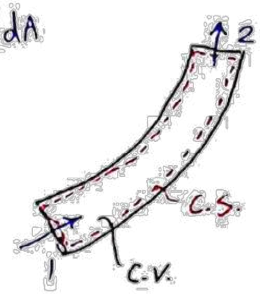
ب) سرعت ماکزیمم در جریان آرام و آشفته برابرند.

– معادله انرژی برای جریان داخل لوله :

$$\dot{Q}_{c.v.} + \dot{W}_{shear} + \dot{W}_{shaft} + \dot{W}_{others} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v.} e\rho\, d\forall + \int_{c.s.} \left(e + \frac{P}{\rho}\right) \rho \vec{V}\cdot d\vec{A}$$

انرژی واحد جرم : $e = \frac{V^2}{2} + gz + u$

(u :) انرژی داخلی واحد جرم



* تنشهای برشی روی سطوح هستند و چون سرعت روی آن صفر است با وجود آنکه نیرو هست اما کار انجام نمی شود.
$\dot{W}_{shear} = 0$

* برای جریان دائمی : Steady-State $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

* جمله آخر نیز چون سرعت دارد تنها برای سطوح ورودی و خروجی است.

$$\Rightarrow \dot{Q}_{c.v.} = \int_{A_1} \left(e_1 + \frac{P_1}{\rho_1}\right) \rho \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int_{A_2} \left(e_2 + \frac{P_2}{\rho_2}\right) \rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2$$

با فرض خواص سیال یکنواخت در سطوح ورودی و خروجی :

$$\dot{Q}_{c.v.} = -\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho_1} + u_1 + g z_1\right) - \int_{A_1} \frac{V_1^2}{2} \rho V_1\, dA_1 + \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho_2} + u_2 + g z_2\right) \text{ و}$$

$$+ \int_{A_2} \frac{V_1^2}{2} \rho V_2\, dA_2$$

- ضریب انرژی جنبشی α : Kinetic Energy Coefficient

عبارتست از نسبت انرژی جنبشی واقعی به انرژی جنبشی متوسط :

$$\alpha = \frac{\int_A \frac{V^2}{2}\rho V\, dA}{\dot{m}\,\frac{\bar{V}^2}{2}}$$

$$\rightarrow \dot{Q}_{c.v.} = -\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho_1} + gz_1 + u_1 + \alpha\frac{V_1^2}{2}\right) + \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho_2} + gz_2 + u_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{معادله انرژی}: \underbrace{\left(\frac{P_1}{\rho_1} + gz_1 + \alpha_1\frac{V_1^2}{2}\right)}_{\text{انرژی ورودی}} = \underbrace{\left(\frac{P_2}{\rho_2} + gz_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2}\right)}_{\text{انرژی خروجی}} + \underbrace{(\overset{\text{انرژی درونی}}{u_2 - u_1}) - \frac{\delta Q_{c.v.}}{\delta m}}_{\text{افت انرژی}}$$

$\hookrightarrow g h_L \rightarrow$ ارتفاع افت انرژی

* مقدار ضریب انرژی جنبشی برای جریان‌های آرام توسعه یافته برابر ۲ می‌باشد. $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$

* در جریان‌های آشفته از پروفیل سرعت توانی استفاده می‌گردد.

$$\alpha = \left[\frac{U_{max}}{V}\right]^3 \frac{2n^2}{(3+n)(3+2n)} \quad , \quad \frac{U_{max}}{V} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}$$

مثلاً $n=6 \Rightarrow \alpha = 1.08$

$n=10 \Rightarrow \alpha = 1.03$

* بنابراین در جریان‌های آشفته مقدار ضریب انرژی جنبشی تقریباً برابر ۱ است.

$\alpha_1 = \alpha_2 \simeq 1$

- انواع افت انرژی در جریان داخل لوله :

برای جریان توسعه یافته $\Rightarrow gh_L = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2}$

$$gh_L = K\frac{V^2}{2}$$

ضریب اصطکاک دارسی ویسباخ $f(Re, \frac{\varepsilon}{d})$

$$K = \frac{fL}{d}$$

K تابعی از $Re, \frac{L}{d}, \frac{\varepsilon}{d}$

افت های موضعی : (minor Losses)

مربوط به محل هایی است که در آنها سیال توسعه یافته نباشد مثل ورودی مخزن به لوله، خروجی سیال از لوله به مخزن، شیرآلات، اتصالات، انبساط، انقباض ناگهانی.

$$h_{L_m} = K\frac{V^2}{2g}$$

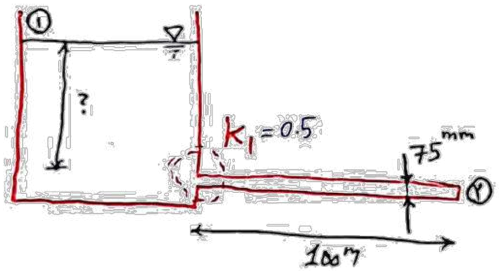
افت‌های طولی: (Major Losses)

مربوط به افت انرژی در طول لوله می‌باشد و از رابطه دارسی-ویسباخ افت انرژی طولی بدست می‌آید:

$$h_{L_\ell} = f \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g}$$

$$\Rightarrow h_L = \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{V_i^2}{2g} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{L_i}{d_i} \frac{V_i^2}{2g}$$

مثال: لوله‌ای به طول 100 متر بصورت افقی به مخزن وصل شده است. عمق آب داخل مخزن چقدر باشد تا دبی حجمی $0.03\ m^3/s$ در لوله جریان داشته باشد؟ قطر داخلی لوله برابر 75^{mm} می‌باشد.



$$\left(\frac{P_1}{\gamma_1}+z_1+\alpha_1\frac{V_1^2}{2g}\right)=\left(\frac{P_2}{\gamma_2}+z_2+\alpha_2\frac{V_2^2}{2}\right)+h_L$$

$$Re=\frac{\rho V d}{\mu}\ ,\ Q=VA=V\frac{\pi d^2}{4}\Rightarrow Re=\frac{4\rho Q}{\pi\mu d}=\frac{4Q}{\pi\nu d}$$

$$Re=\frac{4\times1000\frac{kg}{m^3}\times0.03\,m^3/s}{\pi\times10^{-3}\frac{kg}{m.s}\times0.075}=5\times10^5>4000\Rightarrow$$ جریان آشفته $\Rightarrow\ \alpha_2=1$

$V_1\approx0$

$P_1,P_2=0$

$z_2=0$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{P_1}{\gamma_1}}+z_1+\cancel{\alpha_1\frac{V_1^2}{2g}}=\left(\cancel{\frac{P_2}{\gamma_2}}+\cancel{z_2}+\alpha_2\frac{V_2^2}{2g}\right)+h_L\Rightarrow h_L=z_1-\frac{V_2^2}{2g}$$

از طرفی: $h_L=f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g}+K_1\frac{V_2^2}{2g}\Rightarrow z_1=\frac{V_2^2}{2g}\left(\underset{0.0131}{f}\frac{L}{d}+\underset{0.5}{K_1}+1\right)=44.6^m$